Exercice 2 – Corrigé

— Répondre svp dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.

— Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

Il est bon de décomposer la résolution de ce genre d'exercice à priori complexe en quatre parties. Dans un premier temps (**analyser**), il s'agit de bien appréhender le problème. Quelle est sa thématique ? Ensuite (**lister**), on pose les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème, qui sera l'étape suivante (**résoudre**). Finalement, si cela est possible, on vérifie nos résultats (**vérifier**).

Indépendance linéaire

Déterminer si les polynômes suivants

$$p_1(t) = 1 + t^3\,, \qquad p_2(t) = 1 + t + 3t^2 + 2t^3\,, \qquad p_3(t) = t + 4t^2 + 2t^3$$

forment une famille libre.

Solution.

Analyser. Il s'agit de déterminer si les trois polynômes donnés forment une famille libre.

Lister. Il faut penser à se rappeler la définition d'indépendance linéaire.

Résoudre. Par définition, les polynômes p_1, p_2 et p_3 forment une famille libre si l'unique solution de l'équation

$$c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0$$

est la solution triviale $c_j = 0$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0 \quad &\iff \quad c_1(1 + t^3) + c_2(1 + t + 3t^2 + 2t^3) + c_3(t + 4t^2 + 2t^3) = 0 \\ &\iff \quad (c_1 + c_2) + (c_2 + c_3)\,t + (3c_2 + 4c_3)\,t^2 + (c_1 + 2c_2 + 2c_3)\,t^3 = 0 \end{aligned}$$

En égalisant les coefficients nous trouvons le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

L'échelonnement de la matrice des coefficients du système nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice échelonnée obtenue possède un pivot par colonne, la solution du système d'équations linéaires homogènes est unique. Par conséquent, les polynômes p_1, p_2 et p_3 forment une famille libre.